Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie d'un espace vectoriel V

Définition 35 (span ou vect)**.**
Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de V. L'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_p$ s'appelle le *span*.

Théorème 29. *Soient $v_1, \ldots, v_p$ des éléments d'un espace vectoriel V. Alors $\underline{\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_p\}}$ est un sous-espace vectoriel de V.*

Preuve

- $0_V \in \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$: $0_V = 0 v_1 + \ldots + 0 v_p$
- Si $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$ et $w = \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i$. Alors

$$v + w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \mu_i) v_i$$

$$\in \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$$

- idem pour λv, avec $v \in \mathrm{span}\{v_1, \ldots v_p\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple $W = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

est égal à

$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

car $\forall w \in W$ peut s'écrire

$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

Définition 36 (famille génératrice).
On dira que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une *famille génératrice* de $\text{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$.

Exemple

- $\text{span}\{1, t, t^2\} = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{P}_2$
- $\text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \mathbb{R}^3$
  vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$

4.2 Applications linéaires, noyaux et images

La notion d'application linéaire vue dans $\mathbb{R}^n$ peut se généraliser aux applications $T : V \to W$ entre deux espaces vectoriels V et W.

Définition 37 (application linéaire).
Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \to W$. On dit que T est une *application linéaire* si elle associe à tout élément v de V un unique élément $T(v)$ de W et si T vérifie

1. $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u) \quad \forall u \in V, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Exemples

1) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $p \mapsto T(p)$ avec
$T(p) = (a_0 + a_1) + a_1 t + a_2 t^2$ où
$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
est linéaire.
$T(1+t) = 2 + t$
$T(1 - t - t^2) = -t - t^2$

2) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$ est linéaire.

3) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire, alors

$$T(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(\vec{e}_i)$$

$A = (T(\vec{e}_1) \dots T(\vec{e}_n)) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est la matrice canoniquement associée.

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, on a $T(\vec{x}) = T\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^n x_i T(\vec{e}_i) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\vec{x}.$$

Définition 38 (noyau d'une application linéaire).
Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Le *noyau* de l'application T est l'ensemble des solutions de

$$T(v) = 0_W.$$

On le note

$$\mathrm{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_w\}. \subset V$$

Exemple Soit $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $p \mapsto T(p)$ avec $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 + a_1 + a_1 t + a_2 t^2$

$$T(p) = 0_{\mathbb{P}_2} \iff \begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \iff \mathrm{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{P}_2}\}$$

Définition 39 (image d'une application linéaire).
Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. L' *image* de l'application T est l'ensemble

$$\mathrm{Im}(T) = \{b \in W \mid \exists\, x \in V \text{ avec } T(x) = b\}. \subset W$$

Exemple Soit $b \in \mathbb{P}_2$ avec $b(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$

On cherche $p(t) \in \mathbb{P}_2$ avec $T(p) = b$. $(*)$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = b_0 - b_1 \\ a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

Donc $(*)$ est compatible $\forall b \in \mathbb{P}_2$, donc $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_2$ et T est surjective.

Théorème 30. *Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \to W$ une application linéaire. Alors*

1. $\mathrm{Ker}(T)$ *est un sous-espace vectoriel de* V.
2. $\mathrm{Im}(T)$ *est un sous-espace vectoriel de* W.

Preuve

1. • $0_V \in \mathrm{Ker}(T)$ car $T(0_V) = 0_W$:

$$T(0_V) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0_W$$

• Soient $v, w \in \mathrm{Ker}(T)$. Alors

$$T(v+w) = T(v) + T(w) = 0_W + 0_W = 0_W$$

$\Rightarrow v + w \in \mathrm{Ker}(T)$

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathrm{Ker}(T)$. Alors

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \cdot 0_W = 0_W \Rightarrow \lambda v \in \mathrm{Ker}(T).$$

Cas particulier des matrices

On a vu que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire, alors il existe une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à T, donnée par

$$A = (T(e_1) \dots T(e_n)).$$

Définition 40 (noyau d'une matrice)**.**
Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Le *noyau de la matrice* A, noté $\mathrm{Ker}(A)$, est l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ker(A) est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $\quad A\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^m}$

Ker(A) contient $\vec{0}_{\mathbb{R}^n}$ (sol. triviale)

Théorème 31. *Le noyau d'une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve: On peut vérifier les 3 axiomes de la déf. 34 ou utiliser le th. 30.1.

Définition 41 (image d'une matrice)**.**
Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. L'*image de* A, notée $\mathrm{Im}(A)$, est l'ensemble engendré par les colonnes de la matrice A.

Théorème 32. *Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors* $\mathrm{Im}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^m$.

Preuve On utilise le th. 30.2.

A induit une appl. lin. $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

$\mathrm{Im}(T_A) = \mathrm{Im}(A)$.

Preuve en ex. (double inclusion)

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (colonnes $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$) $\quad A \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il y a une variable libre

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\} = \mathrm{span}\{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}$ car $\vec{a_3}$ est comb. lin. de $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$

$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{A\vec{x} = \vec{0}}\}$ d'où : $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Si on pose $t = x_3$ (libre), alors $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

4.3 Bases d'un espace vectoriel

On peut généraliser la notion d'indépendance linéaire et de span vue dans le cas particulier de $\mathbb{R}^n$ pour définir les bases dans espace vectoriel quelconque.

Définition 42 ((in-)dépendance linéaire)**.**
Soit V un espace vectoriel. Alors la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ d'éléments de V est dite *linéairement indépendante* si

$$\underline{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p = 0_V}$$

n'admet que la solution triviale $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$. Sinon, la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est dite *linéairement dépendante*.

Exemples

1) Soient $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$, $p_3(t) = t^2$ $\quad\|\quad$ $\alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \alpha_3 p_3(t) = 0$ (polynôme nul !)

i.e. $\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 = 0$

$t = 0$: $\quad \alpha_1 = 0$

$t = 1$: $\quad \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$t = -1$: $\quad \alpha_2 \cdot (-1) + \alpha_3 (-1)^2 = 0 \Rightarrow -\alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$$\left.\begin{matrix} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{matrix}\right.$$

Donc la famille $(1, t, t^2)$ de $\mathbb{P}_2$ est lin. indép.

2) La famille $(1, t, 1-t)$ de $\mathbb{P}_1$ est lin. dép :
En effet, $1 - t = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot t$, donc $1-t$ est comb. lin. de 1 et t.

3) Dans $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

La famille (A, B, C, D) est-elle lin. indép ?

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = 0_{M_{2\times 2}(\mathbb{R})}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 & \alpha_1 + 3\alpha_4 \\ -\alpha_3 - 2\alpha_4 & \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha_4 + \alpha_4 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 = -3\alpha_4 \\ \alpha_3 = -2\alpha_4 \\ \alpha_2 = \alpha_4 \end{cases}$$

donc α_4 est une variable libre et on a par exemple pour $\alpha_4 = 1$: $\quad -3A + B - 2C + D = 0$

$\Rightarrow$ la fam. (A, B, C, D) est lin. dép.

Remarque

Dans $\mathbb{R}^n$, si on a une famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$, on peut échelonner la matrice dont les colonnes sont $v_1, \dots, v_p$ pour étudier l'indépendance linéaire. Pour d'autres espaces vectoriels, on n'a pas cette possibilité.

↑ encore

Théorème 33. *Une famille $(v_1, \dots, v_p)$, $p \geq 2$ est linéairement dépendante si et seulement si au moins un des éléments de la famille est combinaison linéaire des autres éléments.*

Preuve : (en exercice)

Définition 43 (base).
Soit V un espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_p)$ un famille d'éléments de V. Alors $\mathcal{B}$ est une *base* de V si

↳ l'ordre des vecteurs est important

1. $\mathcal{B}$ est lin. indépendante

2. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de V, i.e.

$$\text{Span}\{v_1, \ldots, v_p\} = V$$

Remarque: Si $W \subset V$ est un SEV, W est aussi un EV et donc W peut aussi posséder des bases.

Exemples

1) $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ base can. de $\mathbb{R}^n$

2) Si $A = (\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n)$ est une matrice inversible de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, alors la famille $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

3) $(1, t, t^2)$ est une base canonique de $\mathbb{P}_2$

4) $(1, t, \ldots, t^n)$ " " " " $\mathbb{P}_n$

5) $p_1(t) = 1 + t$ $\quad$ $\text{Span}\{p_1, p_2, p_3\} = \mathbb{P}_1$
$p_2(t) = t$ $\quad$ car $a_0 + a_1 t = 0 \cdot p_1 + \frac{a_0}{2} p_3 + a_1 p_2$
$p_3(t) = 2$

Mais la famille (p_1, p_2, p_3) n'est pas libre car

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} p_3$$

$\Rightarrow$ (p_1, p_2, p_3) n'est pas une base de $\mathbb{P}_1$
Par contre (p_2, p_3) forment une base de $\mathbb{P}_1$.

6) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

En effet, la famille est libre et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc la famille engendre $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

parallèle avec $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{(isomorphisme)}$$

Théorème 34 (base extraite). *Soient V un espace vectoriel et $S = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de p éléments de V. Soit $W = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$ le sous-espace vectoriel de V engendré par S. Alors*

1. *Si un des éléments de S, par exemple v_k, s'écrit comme combinaison linéaire des v_i pour $i \neq k$, alors $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, \overset{v_{k-1}}{\cancel{v_k}}, v_{k+1}, \ldots, v_p\} = W$, autrement dit, la famille reste génératrice si on enlève v_k.*
2. *Si $W \neq \{0_V\}$, alors il existe une famille d'éléments extraits de S qui est une base de W.*

Remarque

$\{0_V\}$ est un SEV de V. C'est un EV qui n'admet pas de base !

En effet, la famille (0_V) n'est pas libre.

Bases de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$

Rappel : $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont des EV.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

* $\mathrm{Ker}(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0} \} \subseteq \mathbb{R}^3$

$(A \mid \vec{0}) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ x_1, x_2 de base, x_3 libre

$\vec{S} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

* $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}\{ \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} \} = \mathrm{span}\{ \vec{a_1}, \vec{a_2} \}$. Les vecteurs $\vec{a_1}$ et $\vec{a_2}$ sont lin. indép $\Rightarrow (\vec{a_1}, \vec{a_2})$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$.

On observe que

- les colonnes pivots de A engendrent $\mathrm{Im}(A)$.
- le nbre de vecteurs de la base de $\mathrm{Ker}(A)$ est égal au nbre de colonnes non pivot.

Théorème 35. *Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice et B une forme échelonnée de A. Alors*

1. *Les colonnes pivots de B sont linéairement indépendantes.*

2. *Les colonnes pivots de A (qui correspondent aux colonnes pivots de B) sont linéairement indépendantes.*

3. *Les autres colonnes sont combinaisons linéaires des colonnes pivots.*

Constat Les opérations élémentaires conservent l'indépendance des colonnes.

Stratégie pour trouver une base de $\mathrm{Im}(A)$

1) échelonner A
2) déterminer les colonnes pivots
3) Les colonnes de A qui correspondent aux colonnes pivots de A donnent une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Suite de l'exemple

Notons $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ les colonnes de la forme ER de A.

On remarque que

$$\vec{a_1} \notin \mathrm{Span}\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b_1}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b_2}}$$

n'a pas de solution.

En résumé :

colonnes pivots de A $\downarrow$ base de $\mathrm{Im}(A)$

nbre de variables libres $\downarrow$ nbre de vecteurs de la base de $\mathrm{Ker}(A)$

Remarque les colonnes non pivots de A ne fournissent pas une base de $\mathrm{Ker}(A)$!

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ et

span $\{$col. non pivots de $A\} \subseteq \mathbb{R}^m$!

Exemple : Recherche d'une base de Ker(A)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_3 de base

x_2, x_4, x_5 libres

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$

$\mathrm{Ker}(A)$ sol. de $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

$$\vec{s} = k \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + \ell \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} + m \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}$$

et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Les 3 vecteurs sont lin. indépendants

$\Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$